Introdução aos Processos Estocásticos

Luiz Renato Fontes

Distribuições invariantes

Seja $\mathbf{X} \sim \mathrm{CM}(\cdot, \mathbf{P})$ em $\mathcal{S}$. Uma medida* μ em $\mathcal{S}$ será dita *invariante* (ou *de equilíbrio*, ou *estacionária*) para $\mathbf{X}$ (ou $\mathbf{P}$) se

$$\mu \mathbf{P} = \mu \quad (\text{ie, } \mu_y = \textstyle\sum_{x \in \mathcal{S}} \mu_x P_{xy},\ y \in \mathcal{S}). \tag{0}$$

Se μ for uma probabilidade, diremos que μ é uma *distribuição invariante* (ou *de equilíbrio*, ou estacionária).

Obs. 1) μ invariante $\Rightarrow \mu \mathbf{P}^n = \mu,\ n \geq 0$. (1)

2) Se μ for distribuição invariante e $X_0 \sim \mu$, então $X_n \sim \mu,\ n \geq 1$.

Def. Diremos que um processo estocástico $(X_n)_{n \geq 0}$ é *estacionário* se $(X_{n+\ell})_{n \geq 0} \sim (X_n)_{n \geq 0},\ \ell \geq 0$.

---

*Uma medida em $\mathcal{S}$ é um vetor em $\mathcal{S}$ com todas as coordenadas não negativas.

Teorema 1

Se μ for uma distribuição invariante para uma Cadeia de Markov $\mathbf{X}$, e $X_0 \sim \mu$, então $\mathbf{X}$ é um processo estacionário.

Dem. Basta mostrar que para $n, \ell \geq 1$, $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{S}$ arbitrários

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{1+\ell} = x_1, \dots, X_n = x_{n+\ell}). \qquad (2)$$

O lado direito de (2) vale

$$\sum_{x \in \mathcal{S}} \mathbb{P}(X_\ell = x) P_{xx_1} \cdots P_{x_{n-1}x_n} \overset{\text{inv}}{=} \sum_{x \in \mathcal{S}} \mu_x P_{xx_1} \cdots P_{x_{n-1}x_n},$$

que coincide com o lado esquerdo de (2). $\square$

Teorema 2

Suponha que $\mathcal{S}$ seja finito e que para algum $x \in \mathcal{S}$ haja um vetor π em $\mathcal{S}$ tal que

$$P_{xy}^{(n)} \to \pi_y \text{ quando } n \to \infty \; \forall y \in \mathcal{S}.$$

Então, π é uma distribuição invariante.

Dem. $\pi_y = \lim_{n\to\infty} P_{xy}^{(n)} \overset{\text{CK}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{z\in\mathcal{S}} P_{xz}^{(n-1)} P_{zy}$

$$\overset{|\mathcal{S}|<\infty}{=} \sum_{z\in\mathcal{S}} \lim_{n\to\infty} P_{xz}^{(n-1)} P_{zy} = \sum_{z\in\mathcal{S}} \pi_z P_{zy},$$

e como $\pi_y \geq 0 \; \forall y$, π é uma medida invariante.

Agora,

$$\sum_{y\in\mathcal{S}} \pi_y = \sum_{y\in\mathcal{S}} \lim_{n\to\infty} P_{xy}^{(n)} \overset{|\mathcal{S}|<\infty}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{y\in\mathcal{S}} P_{xy}^{(n)} = 1,$$

e π é uma probabilidade. $\square$

Obs.

No passeio aleatório discutido acima, temos

$$P_{xy}^{(n)} \to 0 \text{ quando } n \to \infty \ \forall x, y \in \mathbb{Z}^d.$$

($\pi \equiv 0$ não deixa de ser uma medida invariante, mas não é uma probabilidade.)

Exemplos

1) $$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

Descontados casos triviais ($\alpha + \beta = 0$ ou 2), temos (do que vimos antes): quando $n \to \infty$

$$\mathbf{P}^n \to \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{pmatrix}$$

e logo $\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}, \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)$ é distribuição invariante para $\mathbf{P}$.

Exemplos (cont)

2) $$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Podemos voltar ao que fizemos antes e (tentar) calcular o limite de $\mathbf{P}^n$ para obter uma probabilidade invariante. Em vez disso, notemos que a Condição (0) para que π seja invariante produz um sistema linear de equações para μ. Vamos montá-lo e tentar resolvê-lo nesse caso. π deve satisfazer:

$$\pi_1 = \frac{\pi_3}{2}; \quad \pi_2 = \pi_1 + \frac{\pi_2}{2}; \quad \pi_3 = \frac{\pi_2}{2} + \frac{\pi_3}{2} \Rightarrow \pi = \pi_1(1,2,2)$$

Como queremos que π seja uma probabilidade, $\mathcal{P}_1 = \frac{1}{5}$, e $\pi = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

Note que só temos uma probabilidade invariante nesse caso, e, logo, se o cálculo do limite sugerido acima vingar (de fato, vinga; verifique), então deve produzir π como acima.

Medidas invariantes (cont)

Def. Para $z \in \mathcal{S}$ fixado arbitrariamente, e $x \in \mathcal{S}$ seja

$$\gamma_x^z = \mathbb{E}_z\Big\{ \sum_{n=0}^{T_z-1} \mathbb{1}_{\{X_n=x\}} \Big\},$$

o $\#$ esperado de visitas a x por $\mathbf{X}$ entre duas visitas a z.

Obs. Sob $\mathbb{P}_z$, $\sum_{n=0}^{T_z-1} \mathbb{1}_{\{X_n=x\}} = \sum_{n=1}^{T_z} \mathbb{1}_{\{X_n=x\}}$, se $x \neq z$;
se $T_z < \infty$, então a igualdade vale também para $x = z$. (3)

Teorema 1. Suponha que $\mathbf{P}$ seja irredutível e recorrente. Então

(i) $\gamma_z^z = 1$; (ii) $\gamma^z = (\gamma_x^z,\, x \in \mathcal{S})$ é uma medida invariante para $\mathbf{P}$;

(iii) $0 < \gamma_x^z < \infty$, $x \in \mathcal{S}$.

Dem. (i) é óbvio. (ii) Para $n \geq 1$, $\{T_z \geq n\} = \{T_z \leq n-1\}^c$ depende apenas de $X_0, \ldots, X_{n-1}$: se $x, y \in \mathcal{S}$, então

$$\mathbb{P}_z(X_{n-1} = x, X_n = y, T_z \geq n) \overset{\text{PM}}{=} \mathbb{P}_z(X_{n-1} = x, T_z \geq n) P_{xy} \quad (4)$$

Dem. Teo 1 (cont)

P recorrente: sob $\mathbb{P}_z$, $T_z < \infty$ com probabilidade 1. Logo

$$\gamma_y^z \overset{(3)}{=} \mathbb{E}_z\Big\{ \sum_{n=1}^{T_z} \mathbb{1}_{\{X_n=y\}} \Big\} = \mathbb{E}_z\Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n=y,\, n\le T_z\}} \Big\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_z(X_n = y,\ n \le T_z) = \sum_{x\in\mathcal{S}} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_z(X_{n-1} = x, X_n = y,\ n \le T_z)$$

$$\overset{(4)}{=} \sum_{x\in\mathcal{S}} P_{xy} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_z(X_{n-1} = x, n \le T_z)}_{\mathbb{E}_z\{\sum_{n=1}^{T_z} \mathbb{1}_{\{X_{n-1}=x\}}\}} = \sum_{x\in\mathcal{S}} \underbrace{\mathbb{E}_z\Big\{ \sum_{n=0}^{T_z-1} \mathbb{1}_{\{X_n=x\}} \Big\}}_{\gamma_x^z} P_{xy}$$

$\square_{(ii)}$

Obs. De (ii) e (1): $\forall n \ge 0,\ w, y \in \mathcal{S},\ \gamma_y^z = \sum_{x\in\mathcal{S}} \gamma_x^z P_{xy}^{(n)} \ge \gamma_w^z P_{wy}^{(n)}$ (5)

(iii) **P** irredutível: $\exists\ k, \ell \ge 0$ tq $P_{xz}^{(k)},\ P_{zx}^{(\ell)} > 0$.

De (i) e (5): $\gamma_x^z \ge \gamma_z^z P_{zx}^{(\ell)} > 0$; $\gamma_x^z P_{xz}^{(k)} \le \gamma_z^z = 1 \ \therefore\ \gamma_x^z \le \frac{1}{P_{xz}^{(k)}} < \infty$ $\square$

Teorema 2

Suponha que $\mathbf{P}$ seja irredutível e que λ seja uma medida invariante para $\mathbf{P}$ tal que $\lambda_z = 1$. Então $\lambda \geq \gamma^z$.
Se além disso, $\mathbf{P}$ for recorrente, então $\lambda = \gamma^z$.

Dem.
Para todo $y \in \mathcal{S}$, $y \neq z$, $n \geq 1$, como λ é invariante:

$$\lambda_y = \sum_{x_0 \in \mathcal{S}} \lambda_{x_0} P_{x_0 y} = \sum_{x_0 \neq z} \lambda_{x_0} P_{x_0 y} + P_{zy}$$

$$= \sum_{x_0, x_1 \neq z} \lambda_{x_1} P_{x_1 x_0} P_{x_0 y} + \sum_{x_0 \neq z} P_{z x_0} P_{x_0 y} + P_{zy}$$

$$\vdots$$

$$= \sum_{x_0, \ldots, x_n \neq z} \lambda_{x_n} P_{x_n x_{n-1}} \cdots P_{x_0 y}$$

$$+ \underbrace{P_{zy} + \sum_{x_0 \neq z} P_{z x_0} P_{x_0 y} + \cdots + \sum_{x_0, \ldots, x_{n-1} \neq z} P_{z x_{n-1}} \cdots P_{x_1 x_0} P_{x_0 y}}_{\mathbb{P}_z(X_1 = y, T_z \geq 1) + \mathbb{P}_z(X_2 = y, T_z \geq 2) + \cdots + \mathbb{P}_z(X_n = y, T_z \geq n) = \mathbb{E}_z \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i = y, T_z \geq i\}}$$

$$\geq \mathbb{E}_z \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i = y,\, T_z \geq i\} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}_z \sum_{i=1}^\infty \mathbb{1}\{X_i = y,\, T_z \geq i\}$$

$$= \mathbb{E}_z \sum_{i=1}^{T_z} \mathbb{1}\{X_i = y\} \overset{(3)}{=} \gamma_y^z \quad \therefore \quad \lambda \geq \gamma^z$$

Dem. Teo 2 (cont)

Se **P** for recorrente, então γ^z é invariante, pelo Teo 1.

Logo $\mu := \lambda - \gamma^z \geq 0$ tb é invariante.

Como **P** é irredutível, dado $x \in \mathcal{S}$, existe $n \geq 0$ tal que $P_{xz}^{(n)} > 0$.

Logo, $0 = \mu_z \geq \mu_x P_{xz}^{(n)}$, e $\mu_x = 0$. $\square$

Obs. 1) **P** irredutível e recorrente $\Rightarrow$ existe uma única medida invariante para **P**, a menos de constante multiplicativa. Logo, nesse caso, qualquer medida invariante é ou identicamente nula ou identicamente estritamente positiva (já que, pelo Teo 1, γ^z é identicamente estritamente positiva).

2) A existência ou não de *distribuição* invariante para **P** no caso irredutível e recorrente se reduz à soma

$$\sum_{x \in \mathcal{S}} \gamma_x^z = \sum_{x \in \mathcal{S}} \mathbb{E}_z \sum_{i=1}^{T_z} \mathbb{1}\{X_i = x\} = \mathbb{E}_z(T_z)$$

ser finita ou não, respectivamente.

Def. Se $x \in \mathcal{S}$ for tal que $m_x := \mathbb{E}_x(T_x) < \infty$, então dizemos que x é *recorrente positivo*. Se x for recorrente, mas não recorrente positivo, então será dito *recorrente nulo*.

Teorema 3

Seja **P** irredutível. Então são equivalentes as seguintes afirmações.

(i) Todos os estados são recorrentes positivos;

(ii) Existe um estado recorrente positivo;

(iii) **P** admite uma distribuição invariante.

Além disso, sob (iii), sendo π a distribuição invariante, temos:

$$\pi_x = \frac{1}{m_x}, \, x \in \mathcal{S}.$$

Obs. 1) **P** irredutível e recorrente positiva $\Rightarrow$ π é única;

2) Recorrência positiva, resp. nula, é propriedade de classe (pois cadeia restrita a classe recorrente/fechada é irredutível).

Dem. Teo 3

(i $\Rightarrow$ ii): óbvio.

(ii $\Rightarrow$ iii): Se $z \in \mathcal{S}$ for recorrente positivo, então é recorrente, e, pela irredutibilidade, $\mathbf{P}$ é recorrente. Teo 1: γ^z é invariante. Agora,

$$\sum_{x\in\mathcal{S}} \gamma_x^z = \sum_{x\in\mathcal{S}} \mathbb{E}_z \sum_{i=1}^{T_z} \mathbb{1}\{X_i = x\} = \mathbb{E}_z T_z = m_z < \infty,$$

logo $\pi_x = \gamma_x^z / m_z$, $x \in \mathcal{S}$, é uma probabilidade invariante.

(iii $\Rightarrow$ i): Seja $z \in \mathcal{S}$; como π é uma probabilidade, $\exists x : \pi_x > 0$; como $\mathbf{P}$ é irredutível, $\exists\, n \geq 0 : P_{xz}^{(n)} > 0$; como π é invariante, $\pi_z \geq \pi_x P_{xz}^{(n)} > 0$.

Seja agora $\lambda_x = \pi_x / \pi_z$, $x \in \mathcal{S}$; Teo 2: $\lambda \geq \gamma^z$. Logo

$$m_z = \sum_{x\in\mathcal{S}} \gamma_x^z \leq \sum_{x\in\mathcal{S}} \lambda_x = \sum_{x\in\mathcal{S}} \frac{\pi_x}{\pi_z} = \frac{1}{\pi_z} < \infty. \tag{6}$$

$\therefore$ z é recorrente positivo $\therefore$ z é recorrente $\therefore$ $\mathbf{P}$ é recorrente

Teo 2: $\lambda = \gamma^z$, e a $\leq$ em (6) é uma $=$. $\square$

Obs.

1) Se $\mathcal{S}$ é irredutível, então

a) $\mathcal{S}$ recorrente positivo $\Leftrightarrow \exists$ distribuição invariante;

b) $\mathcal{S}$ recorrente $\Rightarrow \exists$ medida invariante, única a menos de constante multiplicativa;

c) $\mathcal{S}$ recorrente nulo $\Rightarrow \nexists$ distribuição invariante;

d) $\mathcal{S}$ recorrente nulo $\Leftarrow \exists$ medida invariante infinita $+$ $\mathcal{S}$ recorrente

2) A investigação sobre a existência/unicidade de medida/ distribuição invariante , bem como a recorrência positiva/nula/transitoriedade de uma cadeia irrredutível pode ser feita investigando-se as soluções da equação linear/sistema de equações lineares dada(s) por

$$\mu = \mu \mathbf{P},$$

onde μ é a incógnita.

3) $\mathcal{S}$ finito, irredutível: Teo 4 Álbum 4 $\Rightarrow \mathcal{S}$ recorrente; Teo 2: $\gamma_x^z < \infty$, $x \in \mathcal{S}$

$\therefore m_z = \sum_{x \in \mathcal{S}} \gamma_x^z < \infty$, e z é rec positivo; Teo 3: $\mathcal{S}$ é recorrente positivo.

Exemplos

1) PASS em $\mathbb{Z}$ (irredutível, recorrente)

Seja $\mu_x \equiv 1$. Então $\mu_x = \frac{1}{2}\mu_{x-1} + \frac{1}{2}\mu_{x=1}$, $x \in \mathbb{Z}$, e logo μ é inv. Sendo μ infinita, a Obs 1d acima diz que a cadeia é rec nula.

2) O argumento acima funciona igualmente em $\mathbb{Z}^2$; $\mu \equiv 1$ é invariante também para o PASS em $\mathbb{Z}^d$, $d \geq 3$, mas nesse caso, a cadeia não é recorrente†.

3) PAS assimétrico em $\mathbb{Z}$: $P_{x\,x-1} = q < p = P_{x\,x+1}$, $p + q = 1$.

$$\mu = \mathbf{P}\mu \Leftrightarrow \mu_x = p\mu_{x-1} + q\mu_{x+1},\ x \in \mathbb{Z}$$

Essa eq de diferenças tem a seguinte sol geral: $\mu_x = A + B\left(\frac{p}{q}\right)^x$;

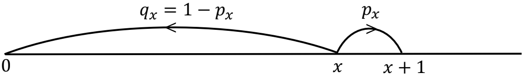
logo, temos uma família a 2 parâmetros, A, $B \geq 0$, de medidas invariantes: não há unicidade a menos de const multiplicativa (cadeia transitória); não há distribuição invariante.

†Esse caso é contra-ex para recíproca da Obs 1b: Teo de Liouville discreto.

Exs (cont)

4) *Castelo de cartas*

$\mathcal{S} = \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2 \ldots\}$; $P_{x\,x+1} = p_x \in (0, 1)$, $x \geq 0$.



$\mu\mathbf{P} = \mu \Leftrightarrow \mu_0 = \sum_{x=0}^{\infty} \mu_x q_x, \quad \mu_x = \mu_{x-1} p_{x-1}$, $x \geq 1$.

Iterando: $\mu_x = \mu_0 \prod_{y=0}^{x-1} p_y =: \mu_0 \mathcal{P}_{x-1}$. Logo

$\bar{\mu} = (1, \mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \ldots)$ e múltiplos positivos são meds invariantes.

Se $\mathcal{M} := \sum_{x \geq 0} \mathcal{P}_x < \infty$, então $\pi = \frac{\bar{\mu}}{1+\mathcal{M}}$ é a distr invariante.

Nesse caso, como $\mathbf{P}$ é irredutível, temos que $\mathbf{P}$ é rec positiva.

Exercício: Mostre que $\mathbf{P}$ é (a) transitória $\Leftrightarrow \lim_{x \to \infty} \mathcal{P}_x = \prod_{y=0}^{\infty} p_x > 0$;

(b) recorrente nula $\Leftrightarrow \prod_{y=1}^{\infty} p_x = 0$ e $\sum_{x \geq 0} \mathcal{P}_x = \infty$.

Convergência ao equilíbrio

Def. $x \in \mathcal{S}$ é dito *aperiódico* se $P_{xx}^{(n)} > 0 \ \forall \ n$ bastante grande

Obs. Pode-se verificar que x é aperiódico se só se o *máximo divisor comum* de $\{n \geq 1 : \ P_{xx}^{(n)} > 0\}$ for 1.

Lema 1. Se $\mathbf{P}$ for irredutível e admitir um estado aperiódico, então para todo $x, y \in \mathcal{S}$, temos que $P_{xy}^{(n)} > 0 \ \forall \ n$ bastante grande. Em particular, nesse caso, todo estado é aperiódico.

Dem. Sejam $z \in \mathcal{S}$ aperiódico, e $x, y \in \mathcal{S}$.

Irredutibilidade: $\exists \, r, s$: $P_{xz}^{(r)}, \ P_{zy}^{(s)} > 0$.

Dado n_0 tq $P_{zz}^{(n)} > 0 \ \forall \ n \geq n_0$, se $n \geq n_0' := n_0 + r + s$:

$$P_{xy}^{(n)} \geq P_{xz}^{(r)} P_{zz}^{(n-r-s)} P_{zy}^{(s)} > 0, \text{ já que } n - r - s \geq n_0. \qquad \square$$

Obs. Aperiodicidade é propriedade de classe.

Teorema 4 (Convergência ao equilíbrio)

Suponha que **P** seja irredutível, aperiódica, e que tenha distribuição invariante π. Dada uma distribuição inicial μ qualquer, temos

$$\mathbb{P}(X_n = y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi_y, \; \forall y \in \mathcal{S}. \tag{7}$$

Em particular,

$$\mathbb{P}_x(X_n = y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi_y, \; \forall x, y \in \mathcal{S}. \tag{8}$$

Obs. 1) O limite não depende de μ ou x (perda de memória).

2) Segue do Teo 3 que podemos substituir a frase "que tenha distribuição invariante π" por "recorrente positiva"; nesse caso, adicionamos depois de (7): "onde π é a distribuição invariante estipulada pelo Teo 3".

3) Cadeias irredutíveis e recorrentes positivas são ditas *ergódicas*. Cadeias irredutíveis finitas são ergódicas (vide Obs 2 no Slide 13).

Dem. Teo 4 (*Acoplamento de Doeblin*)

Seja $\mathbf{Y} \sim \mathrm{CM}(\pi, \mathbf{P})$ independente de $\mathbf{X}$. Dado $v \in \mathcal{S}$, seja

$$T = \inf\{n \geq 1 : X_n = Y_n = v\}.$$

1) Vamos mostrar que $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$.

$\mathbf{W} := (X_n, Y_n)$ é uma CM em $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ com MT $\tilde{P}_{(x,y),(w,z)} = P_{xw}P_{yz}$ e distribuição inicial $\lambda_{(x,w)} = \mu_x \pi_w$.

Como $\mathbf{P}$ é aperiódica, $\forall x, y, w, z \in \mathcal{S}$, $\tilde{P}^{(n)}_{(x,y),(w,z)} = P^{(n)}_{xw} P^{(n)}_{yz} > 0$

$\forall$ n grande o bastante; logo $\tilde{P}$ é irredutível.

Além disso, $\tilde{P}$ tem distribuição invariante $\tilde{\pi}_{(x,w)} = \pi_x \pi_w$;

Teo 3: $\tilde{P}$ rec pos.

Como $T = T_{(v,v)}$, o tempo de 1^a passagem de $\mathbf{W}$ por (z, z),

segue do Teo A do Álbum 4 que $\mathbb{P}(T < \infty) = 1$.

Dem. Teo 4 (cont)

2) Seja $Z_n = \begin{cases} X_n, & \text{se } n < T; \\ Y_n, & \text{se } n \geq T. \end{cases}$

Vamos mostrar que $\mathbf{Z} \sim \mathrm{CM}(\mu, \mathbf{P})$.

Como T é um TP para $\mathbf{W}$, e a PFM vale para $\mathbf{W}$, temos que $(X_{T+n}, Y_{T+n}) \sim (W_n)$ com dist inicial concentrada em (v, v) independente de $\{(X_\ell, Y_\ell); 0 \leq \ell \leq T\}$, e temos por simetria

$$(X_{T+n}, Y_{T+n}) \sim (Y_{T+n}, X_{T+n}).$$

Logo, $(Z_n) \sim (X_n)$.

Dem. Teo 4 (cont)

3) Da construção acima:

$$\mathbb{P}(X_n = x) = \mathbb{P}(Z_n = x) = \mathbb{P}(X_n = x, T > n) + \underbrace{\mathbb{P}(Y_n = x, T \leq n)}_{\mathbb{P}(Y_n=x)-\mathbb{P}(Y_n=x,T>n)} = \pi_x + \varepsilon_{n,x},$$

onde $|\varepsilon_{n,x}| \leq \mathbb{P}(T > n) \to 0$ quando $n \to \infty$.

$\square$

Convergência ao equilíbrio — Caso irredutível geral

Para tratar do caso irredutível geral (ñ necessaria/e aperiódico, ñ necessaria/e rec pos), começamos com um resultado preliminar.

Teorema 5 Seja $\mathbf{P}$ irredutível. Então $\exists$ um inteiro $d \geq 1$ e uma partição $\mathcal{S} = \mathcal{C}_0 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_{d-1}$ tq, fazendo $\mathcal{C}_{nd+r} = \mathcal{C}_r$, $0 \leq r < d$,

(i) Suponha que $x \in \mathcal{C}_r$. Então, $P_{xy}^{(n)} > 0 \Rightarrow y \in \mathcal{C}_{r+n}$;

(ii) Dados r e $x, y \in \mathcal{C}_r$, temos que $P_{xy}^{(nd)} > 0 \ \forall \ n$ grande.

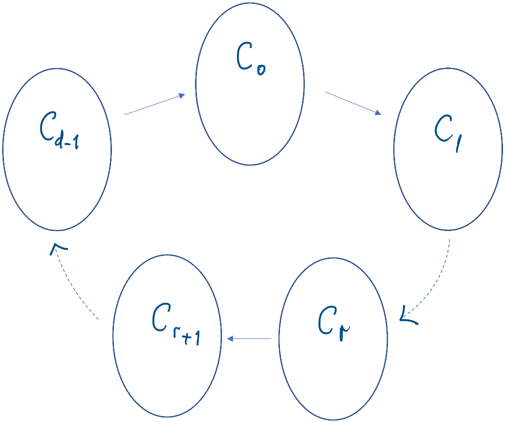
Obs. 1) d é dito o *período* da CM/de $\mathbf{P}$; o caso aperiódico corresponde a $d = 1$.

2) Pode-se mostrar que $d = \text{mdc}\,\{n \geq 1 : \ P_{xx}^{(n)} > 0\}$, indep de $x \in \mathcal{S}$.

3) A partição é única a menos de qual componente recebe o rótulo "0", no caso em que $d > 1$, o que é arbitrário entre os d componentes.

4) Esse teorema diz que, para $0 \leq r < d$, se μ se concentrar em $\mathcal{C}_r$, então $(Y_n)_{n \geq 0} = (X_{dn})_{n \geq 0}$ é uma CM$(\mu, \mathbf{P}^d)$ em $\mathcal{C}_r$, irredutível e aperiódica, e, logo, a ela se pode aplicar o Teorema 4, se for recorrente positiva. Enunciaremos um resultado mais geral no Teorema 6 abaixo.

Ilustração para o Teorema 5



As transições em 1 passo de dado estado de $\mathcal{C}_r$, para dado $r = 0, 1, \ldots, d-1$, se dá necessariamente para um estado de $\mathcal{C}_{r+1}$ (não necessariamente sempre o mesmo).

Dem. Teo 5

Fixemos $z \in \mathcal{S}$ e seja $\mathcal{N} = \{n \geq 0 : \ P_{zz}^{(n)} > 0\}$; escolhamos $n_1, n_2 \in \mathcal{N}$ tq $0 \leq n_1 < n_2$ e $d = n_2 - n_1$ seja o menor possível.

Para $r = 0, \ldots, d-1$, seja

$$\mathcal{C}_r = \{x \in \mathcal{S} : \ P_{zx}^{(nd+r)} > 0 \text{ para algum } n \geq 0\}.$$

Pela irredutibilidade: $\mathcal{S} = \mathcal{C}_0 \cup \ldots \cup \mathcal{C}_{d-1}$

Suponha que $P_{zx}^{(nd+r)}$, $P_{zx}^{(n'd+s)} > 0$ para certos $n' \geq n \geq 0$, $r, s \in \{0, \ldots, d-1\}$.

Fazendo $\delta = n' - n$, temos: $P_{zz}^{(\delta n_1)}$, $P_{zz}^{(\delta n_2)} > 0$.

Seja $\ell \geq 0$ tq $P_{xz}^{(\ell)} > 0$. Então $P_{zz}^{(\delta n_2 + nd + r + \ell)} \geq P_{zz}^{(\delta n_2)} P_{zx}^{(nd+r)} P_{xz}^{(\ell)} > 0$;

similarmente, $P_{zz}^{(\delta n_1 + n'd + s + \ell)} > 0$.

Como $\delta n_2 + nd = \delta n_1 + n'd$, segue da minimalidade de d que $r = s$, e, logo, $\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_{d-1}$ é uma partição de $\mathcal{S}$.

(i) Suponha que $x \in \mathcal{C}_r$ e $P_{xy}^{(n)} > 0$. Escolhendo ℓ tq $P_{zx}^{(\ell d + r)} > 0$,

temos que $P_{zy}^{(\ell d + r + n)} > 0$, e $y \in \mathcal{C}_{r+n}$. $\quad \square_{(i)}$

Dem. Teo 5 (cont)

Note que fazendo $x = y = z$ no argumento acima, podemos concluir que d divide cada elemento de $\mathcal{N}$, em particular $d|n_1$.

Vamos a seguir mostrar que $nd \in \mathcal{N}$ para todo n bastante grande.

$$\text{Se } n_1 = 0\text{, então } d = n_2 \text{ e } P_{zz}^{(nd)} \geq \left(P_{zz}^{(n_2)}\right)^n > 0 \ \forall n. \tag{9}$$

Se $n_1 > 0$ e n for tq $nd \geq n_1^2$, então escrevamos

$$nd = qn_1 + s, \tag{10}$$

com q, s inteiros tq $q \geq n_1$ e $0 \leq s \leq n_1 - 1$.

Como $d|n_1$, temos de (10) que $d|s$: $s = \ell d$ para algum $0 \leq \ell < n_1$.

$$\therefore\ nd = (q-\ell)n_1 + \ell n_2 \ \Rightarrow\ P_{zz}^{(nd)} \geq \left(P_{zz}^{(n_1)}\right)^{q-\ell}\left(P_{zz}^{(n_2)}\right)^{\ell} > 0 \tag{11}$$

De (9) e (11): $nd \in \mathcal{N}$ para todo $n \geq n_1^2/d$.

Dem. Teo 5 (cont)

(ii) Suponha que $x, y \in \mathcal{C}_r$. Escolhendo ℓ_1, ℓ_2 tq $P_{xz}^{(\ell_1)}$, $P_{zy}^{(\ell_2)} > 0$:

$$P_{xy}^{(\ell_1+nd+\ell_2)} \geq P_{xz}^{(\ell_1)} P_{zz}^{(nd)} P_{zy}^{(\ell_2)} > 0 \text{ sempre que } nd \geq n_1^2,$$

e (i) $\Rightarrow d | \ell_1 + \ell_2$. $\square$

Obs. $d = \text{mdc } \mathcal{N}$, e indep de z, é dito o *período* da CM.

(O caso aperiódico corresponde a $d = 1$.)

Exemplos

1) O Passeio Aleatório Simples em $\mathbb{Z}$, com $p \in (0, 1)$, é irredutível e tem período $d = 2$ com $\mathcal{C}_0 = \{\text{inteiros pares}\}$ e $\mathcal{C}_1 = \{\text{inteiros ímpares}\}$ (ou vice-versa).

2) Cadeias com 4 e 3 estados e matrizes de transição dadas, resp., por

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$ Temos $d = 2$ em ambos os casos.

Teorema 6 (Teo geral de conv p/ cadeias irredutíveis)

Suponha que $\mathbf{P}$ seja irredutível e tenha período d, e seja $\mathcal{C}_0, \ldots, \mathcal{C}_{d-1}$ a partição estabelecida no Teo 5. Seja μ uma probabilidade em $\mathcal{S}$ concentrada em $\mathcal{C}_0$, e $\mathbf{X} \sim \mathrm{CM}(\mu, \mathbf{P})$. Então, para $r = 0, \ldots, d-1$ e $y \in \mathcal{C}_r$, temos que

$$\mathbb{P}(X_{nd+r} = y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{d}{m_y}, \tag{12}$$

onde $m_y = \mathbb{E}_y(T_y)$ ‡; em particular, para $x \in \mathcal{C}_0$,

$$P_{xy}^{(nd+r)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{d}{m_y}. \tag{13}$$

Obs. Os casos transitório e recorrente nulo estão incluídos; em ambos o limite se anula identicamente.

‡ $\frac{d}{\infty} = 0$

Dem. Teo 6

a) Façamos $\nu = \mu\mathbf{P}^r$; então, pelo Teo 5, $\sum_{x \in \mathcal{C}_r} \nu_x = 1$.

Sendo $Y_n = X_{nd+r}$, $n \geq 0$, temos que $\mathbf{Y} \sim \mathrm{CM}(\nu, \mathbf{P}^d)$ em $\mathcal{C}_r$.

Teo 5: $\mathbf{P}^d$ é irredutível e aperiódica em $\mathcal{C}_r$.

Para $y \in \mathcal{C}_r$, o tempo médio de retorno de $\mathbf{Y}$ a y vale $\frac{m_y}{d}$.

Logo, supondo o Teo 6 válido para o caso aperiódico, temos que

$$\mathbb{P}(X_{nd+r} = y) = \mathbb{P}(Y_n = y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{d}{m_y},$$

e o Teo 6 vale em geral.

Podemos então, para as demais partes, supor que $\mathbf{P}$ é aperiódica.

Temos então, do Teo 4, a validade do Teo 6 no caso recorrente positivo.

Vamos a seguir examinar os casos restantes, a saber, o transitório e o recorrente nulo.

Dem. Teo 6 (cont)

b) Se **P** for transitória, então, sendo V_x o número de visitas a $x \in \mathcal{S}$, vimos que $V_x \sim$Geo(p_x), com $p_x = \mathbb{P}_x(T_x = \infty) > 0$.

Segue que $\mathbb{P}_x(V_x < \infty) = 1$, e $\mathbb{P}_x(L_x < \infty) = 1$, onde

$$L_x = \sup\{n \geq 0 : \; X_n = x\}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = x) &\leq \textstyle\sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(H^x = i)\mathbb{P}_x(X_{n-i} = x) \\
&\leq \mathbb{P}\big(\tfrac{n}{2} \leq H^x \leq n\big) + \textstyle\sum_{i=0}^{n/2} \mathbb{P}(H^x = i)\, \overbrace{\mathbb{P}_x(X_{n-i} = x)}^{\leq \mathbb{P}_x(L_x \geq \frac{n}{2})} \\
&\leq \mathbb{P}\big(\tfrac{n}{2} \leq H^x < \infty\big) + \mathbb{P}_x\big(L_x \geq \tfrac{n}{2}\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Dem. Teo 6 (cont)

c) Se $\mathbf{P}$ for recorrente nula, então,

$$m_y = \sum_{i \geq 0} \mathbb{P}_y(T_y > i) = \mathbb{E}_y(T_y) = \infty.$$

Dado $\varepsilon > 0$, escolhamos K tal que $\sum_{i=0}^{K-1} \mathbb{P}_y(T_y > i) \geq \frac{2}{\varepsilon}$.

Então, para $n \geq K - 1$

$$1 \geq \sum_{i=n-K+1}^{n} \mathbb{P}(\overbrace{X_i = y, X_\ell \neq y, \ell = i+1, \dots, n}^{\text{eventos disjuntos}})$$

$$= \sum_{i=n-K+1}^{n} \mathbb{P}(X_i = y)\mathbb{P}_y(T_y > n - i)$$

$$= \sum_{i=0}^{K-1} \mathbb{P}(X_{n-i} = y)\mathbb{P}_y(T_y > i)$$

Logo, existe $i \in \{0, \dots, K-1\}$ tal que $\mathbb{P}(X_{n-i} = y)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. (14)

Para *preencher as lacunas* vamos a seguir novamente recorrer ao acoplamento de Doeblin.

Seja $\mathbf{Y} \sim \mathrm{CM}(\lambda, \mathbf{P})$, λ a ser escolhida, e $\mathbf{W} = (X_n, Y_n)$.

Como antes, aperiodicidade garante irredutibilidade.

Dem. Teo 6 (cont)

Se **W** for transitória, então, fazendo $\lambda = \mu$, temos que $\mathbb{P}(X_n = y)^2 = \mathbb{P}(W_n = (y, y)) \xrightarrow[n\to\infty]{a)} 0$, e o resultado segue.

Vamos supor que **W** é recorrente. Usando a notação do Teo 4:

$$\mathbb{P}(T < \infty) = 1,$$

e, de novo,

$$|\mathbb{P}(X_n = y) - \mathbb{P}(Y_n = y)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Para $j \in \{0, \ldots, K-1\}$ fixo, tomando $\lambda = \mu \mathbf{P}^j$, temos que

$$\mathbb{P}(Y_n = y) = \mathbb{P}(X_{n+j} = y).$$

$\therefore \exists\ N \geq 0$ tq $|\mathbb{P}(X_n = y) - \mathbb{P}(X_{n+j} = y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq N,\ j = 0, \ldots, K-1$

$\therefore \exists\ \tilde{N} \geq K$ tq $|\mathbb{P}(X_n = y) - \mathbb{P}(X_{n-i} = y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq \tilde{N},\ i = 0, \ldots, K-1.$

Tomando i como em (14), e usando o resultado acima: $\mathbb{P}(X_n = y) \leq \varepsilon$.

$\square$

Sem irredutibilidade

Sejam $\mathcal{R}_1^+, \mathcal{R}_2^+, \ldots$ as classes recorrentes positivas de $\mathcal{S}$.

1) Se $\mathcal{R}_1^+, \mathcal{R}_2^+, \ldots$ forem todas aperiódicas, e π^i for a distribuição invariante associada a $\mathcal{R}_i^+$ (correspondendo àquela da cadeia com distribuição inicial concentrada em $\mathcal{R}_i^+$):

Dado $x \in \mathcal{S}$, seja $h_x^i = \mathbb{P}_x(\mathbf{X} \text{ atinge } \mathcal{R}_i^+)$. Então

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(X_n = y) &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} h_x^i \pi_y^i, \text{ se } y \in \mathcal{R}_i^+ \text{ para algum } i; \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \text{ se } y \notin \cup_{i\geq 1}\mathcal{R}_i^+. \end{aligned}$$

2) Se houver alguma $\mathcal{R}_i^+$ com período $d_i \geq 2$, a análise se complica, entrando em questão

$$h_x^{i,r}(\ell) = \mathbb{P}_x(H^{\mathcal{R}_i^+} = \ell, X_\ell \in \mathcal{C}_r^i),\ \ell \geq 0,\ r = 0, \ldots, d_i - 1,$$

onde $\mathcal{C}_1^i, \ldots, \mathcal{C}_{d_i-1}^i$ é a partição de $\mathcal{R}_i^+$ dada pelo Teo 5. Essas quantidades podem não ser muito fáceis de achar.